De Dold-Kan correspondentie

$\mathbf{Ch(Ab)} \simeq \mathbf{sAb}$

Joshua Moerman

Begeleid door Moritz Groth

Categorieën

Een *categorie* **C** bestaat uit

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, bend right] \arrow[dr, bend left] & & \\
& X \arrow[r, bend left] & Z \arrow[l, bend left] \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

met *compositie* $- \circ -$, zodat

- er is een *identiteit* $\mathbf{id}_c : C \to C$ en
- compositie is associatief.

Voorbeelden

Set objecten: verzamelingen
pijlen: functies

Ab objecten: abelse groepen
pijlen: groupshomomorfismes

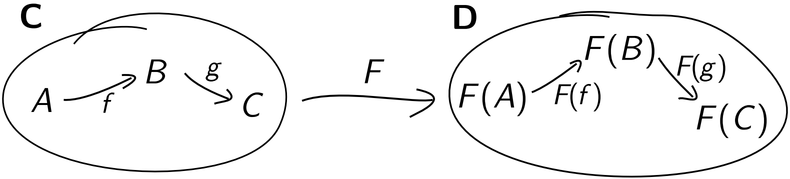
4

$$\begin{tikzcd} *_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & *_2 \arrow[d, "b"] \\ *_3 \arrow[r, "g"] & *_4 \end{tikzcd}$$

met $ba = gf$.

Functors

Een *functor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ is een functie op objecten én pijlen.



Zodat

- $F(\mathbf{id}_C) = \mathbf{id}_{F(C)}$ en
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Voorbeeld functor

Voor een verzameling V definieer

$\mathbb{Z}[V] = \{\phi : V \to \mathbb{Z} \mid \phi(v) \neq 0 \text{ voor eindig veel } v\}$.

Voor een functie $f : V \to W$ definieer

$$\mathbb{Z}[f] : \mathbb{Z}[V] \to \mathbb{Z}[W]$$
$$\mathbb{Z}[f](\phi) = \sum_v \phi(v)\chi_{\{f(v)\}}.$$

Dit is een functor: $\mathbb{Z}[-] : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$.

Voorbeeld functor

Definieer $F : \underline{\mathbf{4}} \to \mathbf{Ab}$ als volgt:

$$F(*_1) = F(*_2) = F(*_3) = F(*_4) = \mathbb{Z}$$

en op pijlen:

$$F(f)(n) = 4n \qquad F(g)(n) = 3n$$
$$F(a)(n) = 6n \qquad F(b)(n) = 2n.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\times 6"] \arrow[d, "\times 4"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\times 2"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\times 3"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Compositie is behouden, want het diagram commuteert.

Samenvattend

- Categorie $\stackrel{D}{=}$ objecten $+$ pijlen.
- Functor $\stackrel{D}{=}$ pijl tussen categorieën.

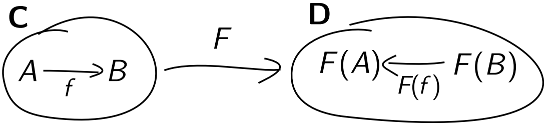
- Functor $\sim$ Constructies.
- Functor $\sim$ Diagrammen.

Samenvattend

- Categorie $\stackrel{D}{=}$ objecten + pijlen.
- Functor $\stackrel{D}{=}$ pijl tussen categorieën.

- Functor $\sim$ Constructies.
- Functor $\sim$ Diagrammen.

F is *contravariant* $\big($notatie $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}\big)$ als



$F(g \circ f) =$
$F(g) \circ F(f)$.

Belangrijke categorie in mijn scriptie

$\mathbf{\Delta}$ objecten: $[n] = \{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
pijlen: monotoon stijgende functies.

Voorbeeld

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ zijn er pijlen

- $\delta_i : [n] \hookrightarrow [n+1]$ slaat i over $(0 \leq i \leq n)$
- $\sigma_i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ bereik i twee keer $(0 \leq i < n)$

Belangrijke categorie in mijn scriptie

$\boldsymbol{\Delta}$ objecten: $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
pijlen: monotoon stijgende functies.

Lemma

Elke pijl in $\boldsymbol{\Delta}$ *is een compositie van*

- $\delta_i : [n] \hookrightarrow [n+1]$ slaat i over $(0 \leq i \leq n)$
- $\sigma_i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ bereik i twee keer $(0 \leq i < n)$

Belangrijke categorie in mijn scriptie

$\mathbf{\Delta}$ objecten: $[n] = \{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
pijlen: monotoon stijgende functies.

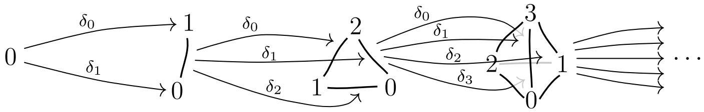
Lemma

Elke pijl in $\mathbf{\Delta}$ is een compositie van

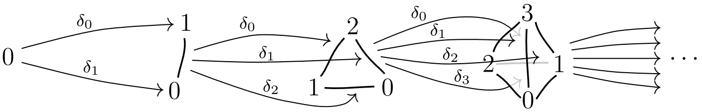
- $\delta_i : [n] \hookrightarrow [n+1]$ slaat i over $\quad (0 \leq i \leq n)$
- $\sigma_i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ bereik i twee keer $(0 \leq i < n)$

Dus $$\mathbf{\Delta} = [0] \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow}\; [1] \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow}\; [2] \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow}\; [3] \ldots$$

Belangrijke categorie in mijn scriptie

$\mathbf{\Delta} =$ 

Belangrijke categorie in mijn scriptie

$\mathbf{\Delta} =$ 

Lemma

De cosimpliciale vergelijkingen gelden:

$$
\begin{aligned}
\delta_j\delta_i &= \delta_i\delta_{j-1}, && \text{if } i < j,\\
\sigma_j\delta_i &= \delta_i\sigma_{j-1}, && \text{if } i < j,\\
\sigma_j\delta_j &= \sigma_j\delta_{j+1} = \mathbf{id}, && \\
\sigma_j\delta_i &= \delta_{i-1}\sigma_j, && \text{if } i > j+1,\\
\sigma_j\sigma_i &= \sigma_i\sigma_{j+1}, && \text{if } i \leq j.
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Ab}$$

$$A : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Ab}$$

$$A := \quad \begin{tikzcd}[column sep=large] A_0 \arrow[r, leftarrow, shift left=2, "A(\delta_0)"] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2, "A(\delta_1)"'] & A_1 \arrow[r, leftarrow, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, leftarrow, shift right=4] & A_2 \arrow[r, leftarrow, shift left=6] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] \arrow[r, leftarrow, shift right=6] & \cdots \end{tikzcd}$$

De categorie **sAb**

Objecten *Simpliciaal abelse groepen A*
preciezer: functoren $A : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Ab}$

Pijlen *Natuurlijke transformaties*
preciezer: $\phi : A \to B$ bestaat uit $\phi_n : A_n \to B_n$ zodat

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "A(f)"] \arrow[d, "\phi_n"] & A_m \arrow[d, "\phi_m"] \\ B_n \arrow[r, "B(f)"] & B_m \end{tikzcd} \qquad \text{voor alle } f : [m] \to [n].$$

De categorie **Ch(Ab)**

Objecten *Ketencomplexen* C
preciezer: collectie abelse groepen C_n en groepshomonorfismes $\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$ zodat $\partial \circ \partial = 0$

Pijlen *Ketenafbeeldingen*
preciezer: $\phi : C \to D$ bestaat uit $\phi_n : C_n \to D_n$ zodat

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n \\ \downarrow \phi_{n+1} & & \downarrow \phi_n \\ D_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & D_n \end{array}$$

sAb lijkt op **Ch(Ab)**

Simpliciaal abelse groepen:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
A_0 \arrow[r, leftarrow, shift left=0.8ex] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=0.8ex]
& A_1 \arrow[r, leftarrow, shift left=1.6ex] \arrow[r, shift left=0.8ex] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=0.8ex] \arrow[r, leftarrow, shift right=1.6ex]
& A_2 \arrow[r, leftarrow, shift left=2.4ex] \arrow[r, shift left=1.6ex] \arrow[r, leftarrow, shift left=0.8ex] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=0.8ex] \arrow[r, shift right=1.6ex] \arrow[r, leftarrow, shift right=2.4ex]
& A_3 \cdots
\end{tikzcd}
$$

met de 5 vergelijkingen

Ketencomplexen:

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \cdots$$

$$\text{met } \partial \circ \partial = 0$$

sAb lijkt op Ch(Ab)

Simpliciaal abelse groepen:

$$A_0 \;\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; A_1 \;\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; A_2 \;\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; A_3 \cdots$$

met de 5 vergelijkingen

Ketencomplexen:

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \cdots$$
$$\text{met } \partial \circ \partial = 0$$

sAb heeft meer structuur?

De Dold-Kan correspondentie

$$\mathbf{sAb} \simeq \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$$

De Dold-Kan correspondentie

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

$$\begin{array}{rll} \text{Zodat} & \forall C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : & N(K(C)) \cong C \\ \text{en} & \forall A \in \mathbf{sAb} : & K(N(A)) \cong A. \end{array}$$

De Dold-Kan correspondentie

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

$$\begin{array}{rll} \text{Zodat} & \forall C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : & N(K(C)) \cong C \\ \text{en} & \forall A \in \mathbf{sAb} : & K(N(A)) \cong A. \end{array}$$

N is in zekere zin surjectief: $\forall C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ is er een $A \in \mathbf{sAb}$ met $N(A) \cong C$.

Eerste gok

Definieer $M : \mathbf{sAb} \to \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ met $M(A)_n = A_n$.

Eerste gok

Definieer $M : \mathbf{sAb} \to \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ met $M(A)_n = A_n$.

Zij $C = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$
Is er een A zodat $M(A) \cong C$?
M.a.w. $A_0 \cong \mathbb{Z}$ en $A_1 \cong 0$, kan dat?

Eerste gok

Definieer $M : \mathbf{sAb} \to \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ met $M(A)_n = A_n$.

Zij $C = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$
Is er een A zodat $M(A) \cong C$?
M.a.w. $A_0 \cong \mathbb{Z}$ en $A_1 \cong 0$, kan dat?

Nee! Want $A_0 \xrightarrow{A(\sigma_0)} A_1$ is injectief!
(want $\sigma_0 \delta_0 = \mathbf{id}$, dus $A(\delta_0)A(\sigma_0) = \mathbf{id}$)

Definities

Zij $A \in \mathbf{sAb}$
$x \in A_n$ heet een *n-simplex*
$x \in A_n$ is *gedegenereerd* als $x = A(\sigma_i)(y)$ voor een zekere i en y.

De juiste constructie

Zij $A \in \mathbf{sAb}$, definieer

$$N(A)_n = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(A(\delta_i))$$

$$\partial = A(\delta_0)$$

De juiste constructie

Zij $A \in \mathbf{sAb}$, definieer

$$N(A)_n = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(A(\delta_i))$$
$$\partial = A(\delta_0)$$

Lemma

$x \in N(A)_n$ is niet-gedegenereerd.

Lemma

$$A_n = N(A)_n \oplus D_n(A).$$

Voorbeeld

Definieer de volgende simpliciaal abelse groep:

$$A_n = \mathbb{Z}$$
$$A(\delta_i) = A(\sigma_i) = \mathbf{id}.$$

Voorbeeld

Definieer de volgende simpliciaal abelse groep:

$$A_n = \mathbb{Z}$$
$$A(\delta_i) = A(\sigma_i) = \textbf{id}.$$

$$N(A) = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots .$$

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

Vragen?